TD Courbes paramétrées

Courbes paramétrées planes

Exercice 1
Etudier et tracer les courbes paramétrées suivantes :

$$(1) \begin{cases} x(t) = t^2 + \frac{2}{t} \\ y(t) = t^2 + \frac{1}{t^2} \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x(t) = \frac{1}{1-t^2} \\ y(t) = \frac{t^3}{1-t^2} \end{cases} \quad (3) \begin{cases} x(t) = 2t + t^2 \\ y(t) = 2t - \frac{1}{t^2} \end{cases}$$

Exercice 2 Folium de Descartes
Soit $\mathcal{C}$ l'arc d'équation implicite : $x^3 + y^3 - xy = 0$.

1. Déterminer les points singuliers de $\mathcal{C}$.
2. Montrer que $\mathcal{C}$ est symétrique par rapport à la première bissectrice.
3. Déterminer les points de $\mathcal{C}$ à tangente horizontale et à tangente verticale.
4. En coupant $\mathcal{C}$ par les droites d'équations $y = tx$, $t \in \mathbb{R}$, trouver une représentation paramétrique de $\mathcal{C}$.
5. Retrouver que $\mathcal{C}$ est symétrique par rapport à la première bissectrice en comparant les points $M(t)$ et $M(1/t)$.
6. Etudier et construire $\mathcal{C}$.

Exercice 3 L'astroïde
A tout arc régulier du plan $t \in I \to M(x(t), y(t))$, on peut associer la famille de ses tangentes qui forme une famille de droites $D_t : y'(t)(x - x(t)) - x'(t)(y - y(t)) = 0$.
Réciproquement, étant donné une famille de droites $(D_t)_{t\in I}$, s'il existe un arc paramétré $t \in I \to M(x(t), y(t))$ dont la tangente en tout point $M(x(t), y(t))$ est D_t, alors on dit que l'arc est une enveloppe de la famille de droites $(D_t)_{t\in I}$.

1. On considère un segment $[P, Q]$ de longueur $a > 0$ dont les extrémités P, Q sont assujetties à décrire respectivement les droites Ox et Oy. Montrer que l'enveloppe des droites (PQ) est l'astroïde $(x(t), y(t)) = (a\cos^3(t), a\sin^3(t))$.
2. Etudier et tracer le support de l'arc paramétré associé à l'astroïde.
3. Calculer la longueur de l'astroïde.

Exercice 4 La cycloïde
On considère la trajectoire d'un point M d'un cercle de rayon R roulant sans glisser sur une droite qu'on prendra comme axe Ox.
On supposera que M est initialement à l'origine O et on notera t une mesure de l'angle $(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CT})$ où C désigne le centre du cercle et T le point en lequel celui-ci est tangent à Ox.

1. Déterminer les équations de la trajectoire de M en fonction du paramètre t.
2. Etudier et représenter le support de l'arc paramétré ainsi obtenu.
3. Calculer la longueur d'une arche de la cycloïde.

4. Déterminer le repère de Serret-Frenet et la courbure.

Exercice 5
On considère la chaînette d'équation $y = a\mathrm{ch}(\frac{x}{a})$ où $a > 0$.

1. Etudier et représenter le support de l'arc paramétré associé.
2. Déterminer le repère de Serret-Frenet et la courbure.

Courbes en coordonnées polaires

Exercice 6
Etudier et tracer les courbes polaires suivantes :

$$r_1(\theta) = \cos(3\theta) \quad r_2(\theta) = \ln(1 - \sin(\theta)) \quad r_3(\theta) = \sin\left(\frac{2\theta}{3}\right) \quad r_4(\theta) = 1 + \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Exercice 7 Cardioïde

1. Etudier et représenter l'arc d'équation polaire $r(\theta) = a(1 - \cos(\theta))$ avec $a > 0$.
2. Calculer la longueur de la cardioïde.
3. Déterminer le repère de Serret-Frenet, la mesure α de l'angle $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{T})$ et la courbure c de la cardioïde.

Exercice 8 Lemniscate de Bernoulli
On considère dans le plan deux points F, F' situés à une distance $2a > 0$ (qu'on choisira sur l'axe des abscisses, de coordonnées $(-a, 0), (a, 0)$).

1. Donner une équation cartésienne de l'ensemble des points M tels que $MF \times MF' = a^2$.
2. Donner une équation polaire de l'ensemble des points M tels que $MF \times MF' = a^2$.
3. Etudier et représenter l'arc d'équation polaire ainsi obtenu.
4. Etablir que la longueur de la lemniscate est donnée par l'intégrale suivante :
$$\sqrt{2}a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos(\theta)}}.$$
5. Déterminer le repère de Serret-Frenet et la courbure.

Exercice 9 Strophoïde droite
Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation $x = -1$ et $\mathcal{C}$ le cercle de centre $I(1, 0)$ et de rayon 1. Une droite Δ passant par l'origine coupe $\mathcal{D}$ en P et $\mathcal{C}$ en Q. Donner une représentation polaire de l'ensemble Γ décrit par le point M milieu de P et Q et le tracer.

Exercice 10

1. Etudier et représenter l'arc polaire d'équation $r(\theta) = \dfrac{1}{\cos^3(\theta/3)}$.
2. Calculer la longueur de la boucle.